Durée 2 heures

Tout document interdit

**Exercice 1 (8, 4)**

On se donne quatre formules α1, α2, α3 et β telles que :

α1 : ∀*x*∀*y***(**P(*x*)∧Q(*y*) → R(*x,y*)**)**

α2 : ∃*x*∃*y* P(*x*)∧Q(*y*)

α3 : ∃*x*∃*y*⎤P(*x*)∨⎤Q(*y*)

β : ∃*x*∃*y* R(*x,y*)

**Question 1 (2, 2, 2, 2)**

Donner :

1. un modèle de l’ensemble S : {α1, α2, α3}
2. une interprétation qui falsifie S.
3. deux modèles de Herbrand de S. Ces modèles seront aussi petits que possible.
4. deux interprétations de Herbrand qui falsifient S

**Question 2 (4)**

Montrer sans utiliser la propriété de complétude de la résolution que : S **|⎯** β

**Exercice 2 (2-4)**

**Question 1.** Ecrire les énoncés suivants dans le langage des prédicats du premier ordre :

**E1 :** Il y’a un *x* tel que : tous ceux qui sont plus grands que *x*  sont grands et tous ceux qui sont plus petits que *x*  sont petits.

**E2 :** *Si* *x* est plus grand que *y* *alors* *y*  est plus petit que *x*.

**E3 :** Si *x* est grand alors il n’est pas petit.

**E4 :** Il existe un *x* qui n’est pas plus grand que lui-même.

**Question 2.** Déduire E4 à partir de E1, E2 et E3. (Ne pas utiliser la propriété de complétude de la résolution).

**Exercice 3 (2)**

Trouver la plus générale instance commune aux expressions suivantes si elle existe :

E1 : Q(*x*, *y*) et E2 : Q(*f*(*y*)*,g*(*x*))

**Correction**

**Exercice I**

**Question 1.**

**Un modèle de l’ensemble S :**

P : pair Q : impair R : x est un multiple de y

D : {3,6}

**Une interprétation qui falsifie S :** (i-e qui falsifie au moins une formule de S)

P : pair Q : impair R : x est un multiple de y

D : {2,4,6}

Cette interprétation falsifie α2.

**Deux modèles de Herbrand de S :**

* Mettre sous forme de Skolem **(0.25 pt)**
* Mettre sous forme clausale : **(0.25 pt)**

S’ : {⎤P(x) ∨⎤Q(y) ∨ R(x,y), P(a), Q(b), ⎤P(c)∨⎤Q(d)}

* Deux modèles de Herbrand de S
* M1 : { P(a), Q(b), ⎤P(c) } **(0.75 pt)**
* M2 : { P(a), Q(b), ⎤P(d)} **(0.75 pt)**
* Deux interprétations de Herbrand qui falsifient
* I1 : {⎤P(a)} **(1 pt)**
* I2 : {⎤Q(b)} **(1 pt)**

**Question 2.**

Montrer que S **|⎯** β ssi S ∪ {⎤β} inconsistant ssi de l’ensemble de clauses issu de S ∪ {⎤β} on peut déduire la clause vide

C1 : ⎤P(*x*) ∨⎤Q(*y*) ∨ R(*x,y*)

C2 : P(*a*)

C3 : Q(*b*)

C4 : ⎤P(*c*)∨⎤Q(*d*)

C5 : ⎤R(*u,v*)

C6 : ⎤R(*x,y*)

C7 : ⎤P(*x*) ∨⎤Q(*y*) res (1,6)

C8 : ⎤P(*a*) ∨⎤Q(*y*)

C9 : ⎤Q(*y*) res (2,8)

C10 : ⎤Q(*b*)

C11 : res (3,10)

**Exercice 2 (2-4)**

**Question 1. 0,5 point par expression**

E1 : Il y’a un *x* tel que : tous ceux qui sont plus grands que *x*  sont grands et tous ceux qui sont plus petits que *x* sont petits.

β1 : ∃*x*∀*y***(**(G(*y*,*x*) → G(*y*)) ∧ (P(*y*,*x*) → P(*y*)) **)**

E2 : *Si* *x* est plus grand que *y* *alors* *y* est plus petit que *x*.

β2  : ∀*x*∀*y*(G(*x*,*y*) → P(*y*,*x*))

E3 : Si *x*  est grand alors il n’est pas petit.

β3  : ∀*x*(G(*x*) → ⎤P(*x*))

**Question 2.** Déduire de E1 et E2 qu’il existe un *x* qui n’est pas plus grand que lui-même : γ : ∃*x*⎤G(*x*,*x*)

β1, β2, β3 |⎯γ  ssi {β1, β2, β3, ⎤γ} inconsistant ssi de l’ensemble S de clauses on peut déduire la clause vide.

**Forme de Skolem : (0.5 pt)**

∀*y***(**(G(*y*,*a*) → G(*y*)) ∧ (P(*y*,*a*) → P(*y*)) **)**

∀*x*∀*y*(G(*x*,*y*) → P(*y*,*x*))

∀*x*(G(*x*) → ⎤P(*x*))

∀*x*G(*x*,*x*)

**Ensemble de clauses : (0.5 pt)**

S : {⎤G(*y*,*a*) ∨ G(*y*), ⎤P(*y*,*a*) ∨ P(*y*), ⎤G(*x*,*y*) ∨ P(*y*,*x*),⎤G(*x*) ∨ ⎤P(*x*), G(*x*,*x*)}

**On renomme les variables : (0.5 pt)**

S’ : {⎤G(*y*,*a*) ∨ G(*y*), ⎤P(*z*,*a*) ∨ P(*z*), ⎤G(*u*,*v*) ∨ P(*v*,*u*),⎤G(*w*) ∨ ⎤P(*w*), G(*x*,*x*)}

**Déduction de la clause vide : (2.5 pt)**

c1 : ⎤G(*y*,*a*) ∨ G(*y*)

c2 : ⎤P(*z*,*a*) ∨ P(*z*)

c3 : ⎤G(*u*,*v*) ∨ P(*v*,*u*)

c4 : ⎤G(*w*) ∨ ⎤P(*w*)

c5 :  G(*x*,*x*)

c6 : ⎤G(*x*,*x*) ∨ P(*x*,*x*) c3[*x*/*u, x*/*v*]

**c7 : P(*x*,*x*)** res (5,6)

c9 : P(*a*,*a*) c7 : [*a*/*x*]

c10 : P(*a*) res (2,9)

c11 : ⎤G(*a*) res (4,10)

c12 : ⎤G(*a*,*a*) res (1,11)

c13 : G(*a*,*a*) c5[*a*/*x*]

c14 :

**Exercice 3 (2)**

Trouver la plus générale instance commune aux expressions suivantes si elle existe :

E1 : Q(*x*, *y*) et E2 : Q(*f*(*y*)*,g*(*x*))

On renomme les variables **(1 pt)**

E1 : Q(*u*, *v*) et E2 : Q(*f*(*y*)*,g*(*x*))

θ1 : { *f*(*y*)/*u*}

E1θ1 : Q(*f*(*y*), *v*) et E2θ1 : Q(*f*(*y*)*,g*(*x*))

θ2 : {*f*(*y*)/*u*}ο {{*g*(*x*)/*v*} = {*f*(*y*)/*u*, *g*(*x*)/*v*}

E1θ2 : Q(*f*(*y*), *g*(*x*)) et E2θ2 : Q(*f*(*y*)*,g*(*x*))

La plus générale instance commune aux 2 expressions est : Q(*f*(*y*)*,g*(*x*)) **(1 pt)**